Lógica Computacional

Fórmulas com Múltiplos Quantificadores

Técnicas de Tradução

Fórmulas com Funções

Formas Prenex

Frases com Múltiplos Quantificadores

- Para além da especificação de propriedades de objetos, vistos isoladamente (o seu tamanho ou forma), estamos geralmente interessados nas relações que vários objetos estabelecem entre si.

- Neste caso, e reportando-se as frases a vários objetos genéricos deverão ser usadas variáveis diferentes para objetos diferentes e naturalmente quantificar as fórmulas resultantes para obter frases com significado.

- Os seguintes exemplos, muito simples, podem ser traduzidos de uma forma "directa"

Todos os objetos têm a mesma forma	$\forall$**x** $\forall$**y SameShape(x,y)**
Existem objetos com o mesmo tamanho	$\exists$**x** $\exists$**y SameSize(x,y)**

- Naturalmente estas fórmulas (e as correspondentes frases) são muito simples. Mas mesmo neste caso há que ter algum cuidado, para com o mapeamento de variáveis a objectos do domínio. Por exemplo, frases semelhantes já não podem ser traduzidas da forma óbvia

Todos os objetos têm formas diferentes	$\forall$**x** $\forall$**y** $\neg$**SameShape(x,y) ?**
Existem objetos do mesmo tamanho	$\exists$**x** $\exists$**y SameSize(x,y) ?**

Frases com Múltiplos Quantificadores

Todos os objetos têm formas diferentes

$$\forall \mathbf{x}\ \forall \mathbf{y}\ \neg \mathtt{SameShape(x,y)}$$

- O **erro** desta tradução é especificar que *um objeto tem uma forma diferente da sua*!
- Com efeito, uma variável pode representar qualquer objeto. Assim sendo, duas variáveis podem ser mapeadas para o mesmo objeto!
- Se um domínio tiver pelo menos um objeto, (por exemplo, **c**), a fórmula acima é sempre falsa, pois não é satisfeita para o par **<x=c, y=c>**.
- De facto, a fórmula pode ser considerada uma forma de especificar, de uma forma muito "indirecta" que *não existem objetos no domínio*!
- Para traduzir a frase acima (e a existencial) há que representar o que não está dito mas está implícito linguisticamente, isto é:

Todos os objetos (**distintos**) têm formas diferentes

$$\forall \mathbf{x}\ \forall \mathbf{y}\ (\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \ \rightarrow \neg \mathtt{SameShape(x,y)})$$

Existem objetos (**distintos**) com a mesma forma

$$\exists \mathbf{x}\ \exists \mathbf{y}\ (\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \ \wedge \mathtt{SameShape(x,y)})$$

Frases com Múltiplos Quantificadores

- Com estes cuidados podemos traduzir frases em língua natural para a FBFs com múltiplos quantificadores. Se conveniente, deveremos usar a técnica de refrasear o enunciado inicial, embora as frases transformadas se tornem muito "artificiais".
- A generalização das formas aristotélicas para 2 variáveis, ilustram bem este método:

Exemplo 1: Todos os cubos são maiores que todos os tetraedros.

Qualquer que seja o objeto, **se** ele for um cubo, **então qualquer** que seja um objeto (o mesmo ou outro), **se** este for um tetraedro, **então** aquele é maior que este.

$$\forall x\ (\mathrm{Cube}(x) \rightarrow \forall y\ (\mathrm{Tet}(y) \rightarrow \mathrm{Larger}(x,y)))$$

Exemplo 2: Todos os cubos são maiores que alguns tetraedros.

Qualquer que seja o objeto, **se** ele for um cubo, **então existe** um objeto (o mesmo ou outro), **que** é um tetraedro **e** aquele é maior que este.

$$\forall x\ (\mathrm{Cube}(x) \rightarrow \exists y\ (\mathrm{Tet}(y) \land \mathrm{Larger}(x,y)))$$

Frases com Múltiplos Quantificadores

Exemplo 3: Alguns cubos são maiores que todos os tetraedros.

Existe um objeto, **que** é um cubo, e **qualquer** que seja o objeto, **se** este for um tetraedro, **então** aquele é maior que este.

$$\exists x\ (Cube(x) \land \forall y\ (Tet(y) \to Larger(x,y)))$$

Exemplo 4: Alguns cubos são maiores que alguns tetraedros.

Existe um objeto, **que** é um cubo, e **existe** um objeto, **que** é um tetraedro **e** aquele é maior que este.

$$\exists x\ (Cube(x) \land \exists y\ (Tet(y) \land Larger(x,y)))$$

- Todos estes exemplos satisfazem as regras de frases aristotélicas: o quantificador universal vem associado a uma implicação e o existencial a uma conjunção.
- De notar que nestas fórmulas não é especificado que **x ≠ y**. Em rigor ***deveria sê-lo*** mas tendo em conta os axiomas da exclusividade (um objeto não pode ser um cubo e um tetraedro simultaneamente) a desigualdade explícita é “desnecessária”.

Frases com Múltiplos Quantificadores

Os exemplos seguintes, requerem refraseados mais complexos.

Exemplo 5a: Qualquer cubo azul é grande.

> **Qualquer** que seja o objeto, **se** for um cubo **e se** for azul**, então** aquele objeto é grande.

$$\forall \mathbf{x}\ (\ (\mathbf{Cube(x)} \land \mathbf{Blue(x)}) \to \mathbf{Large(x)})\ )$$

Exemplo 5b: Qualquer cubo que esteja à esquerda de um tetraedro é grande.

> **Qualquer** que seja o objeto, **se** for um cubo **e se existir** um outro objeto **que** seja um tetraedro **e** aquele esteja à esquerda deste**, então** aquele objeto é grande**.**

$$\forall \mathbf{x}\ (\ \ (\mathbf{Cube(x)} \land \exists \mathbf{y}\ (\mathbf{Tet(y)} \land \mathbf{LeftOf(x,y)})) \to \mathbf{Large(x)})\ )$$

- De notar que a fórmula **`Blue(x)`** (usada no caso 5a) em que a variável x ocorre livre, denota um conjunto (**indeterminado**) de objetos (**`x`**) com a propriedade "*serem azuis*".

- Similarmente, a fórmula $\exists$**`y (Tet(y)`** $\land$ **`LeftOf(x,y))`**, usada no caso 5b, em que a variável x também ocorre livre, denota um conjunto (**indeterminado**) de objetos (**`x`**) com a propriedade de "*estarem à esquerda de um tetraedro*".

Frases com Múltiplos Quantificadores

- O último exemplo, abaixo, corresponde a uma frase cuja interpretação é algo ambígua. No caso, a interpretação “imediata” sugere um quantificador “errado”.

Exemplo 6: Qualquer cubo que esteja à esquerda de algum tetraedro também está à sua frente.

- A frase “equivalente” tem uma interpretação mais directa:

Exemplo 6a: Qualquer cubo que esteja à esquerda de um qualquer tetraedro também está à sua frente.

> **Qualquer** que seja um objeto, **se** for um cubo **então** qualquer que seja o objeto, se este for um tetraedro e aquele estiver à esquerda deste, então aquele também estará à frente deste!

$$\forall x\ (\mathrm{Cube}(x) \rightarrow \forall y\ (\ (\mathrm{Tet}(y) \land \mathrm{LeftOf}(x,y)) \rightarrow \mathrm{FrontOf}(x,y)))$$

- Neste caso, a frase inicial sugere um quantificador existencial (**algum** tetraedro). No entanto como se vê pelo frase adaptada, o quantificador que deve ser usado é de facto um quantificador universal !

Fórmulas com Funções

- A existência de símbolos funcionais na assinatura é muitas vezes utilizada para facilitar a representação dos domínios de discurso. Por exemplo a frase “Todas as pessoas amam a sua (delas) mãe” pode ser representada em (pelo menos) duas formas distintas, consoante a assinatura Σ que se adopte (e que se assume que contem o símbolo predicativo **Loves/2**):

1. A assinatura Σ contem um **símbolo predicativo MotherOf/2**

- Neste caso a frase deverá indicar a relação mãe-filho através desse predicado, o que poderá ser traduzida após o seu refrasear para

  Quaisquer que sejam duas pessoas**, se** a segunda for mãe da primeira **então** esta ama a primeira**.**

$$\forall x \forall y\ ((\mathrm{MotherOf}(y,x) \rightarrow \mathrm{Loves}(x,y))$$

2. A assinatura Σ contem um **símbolo funcional motherOf/2**

- Neste caso a frase poderá ser traduzida de uma forma bastante mais simples,

$$\forall x\ \mathrm{Loves}(x,\mathrm{motherOf}(x))$$

Fórmulas com Funções

- Há no entanto que ter alguns cuidados na utilização de símbolos funcionais.

1. Quando eles coexistem na assinatura com os correspondentes símbolos predicativos, deverá ser garantida a sua correspondência através de uma axioma de **unicidade**.

$$\forall x \forall y\ (\mathrm{MotherOf}(x,y) \leftrightarrow x = \mathrm{motherOf}(y))$$

2. Esta unicidade tem de estar garantida. Por exemplo uma frase semelhante à anterior “Todas as pessoas gostam dos seus filhos” pode ser representada com o predicado ChildOf/2, de forma semelhante à anterior

$$\forall x \forall y\ ((\mathrm{ChildOf}(x,y) \rightarrow \mathrm{Loves}(y,x))$$

- No entanto, não é possivel em geral utilizar um símbolo funcional **childOf/2** para representar a relação pretendida, por esta relação não ser funcional !

- Com efeito, uma pessoa pode ter zero, um ou mais filhos.

Prenex – Formas normais

- Tal como para as fórmulas FPOs da Lógica Proposicional (sem quantificadores) também as fórmulas bem formadas (FBFs) da lógica de predicados têm uma forma normalizada equivalente – a forma Prenex.

- Nesta forma Prenex a ênfase é na colocação dos predicados à cabeça, o que como vimos não ocorre em geral na conversão de frases em língua natural.

- Como veremos mais tarde, e tal como as formas normais para as FPOs o objectivo da conversão de FBFs para uma forma Prenex tem a ver com o seu tratamento automático que é facilitado por esta normalização, e não para as tornar mais adequadas para o tratamento humano (ou por dedução natural).

Definição: Forma Prenex

Uma fórmulas bem formadas diz-se na forma **Prenex** se é constituída por uma sequência de quantificadores seguida de uma fórmula em que todas as variáveis ocorrem livres. A sequência de quantificadores é denominada o **Prefixo** e a fórmula sem variáveis ligadas a **Matriz**.

Normalização de FBFs e Forma Prenex

Exemplo: $\exists x$ (Cube(x) $\wedge$ $\exists y$ (Tet(y) $\wedge$ Larger(x,y)))

- A fórmula acima não está na forma Prenex. No entanto a fórmula é equivalente à fórmula seguinte,

  $\exists x\ \exists y$ (Cube(x) $\wedge$ (Tet(y) $\wedge$ Larger(x,y)))

  que está na forma Prenex, com matriz (Cube(x) $\wedge$ (Tet(y) $\wedge$ Larger(x,y))) e prefixo $\exists x\ \exists y$.

- Neste caso a conversão para a forma Prenex é imediata (quantificação nula: apenas se "deslocou" $\exists y$) mas em geral o processo de conversão é mais complexo, utilizando regras de equivalência já analisadas

  - Equivalências Booleanas
  - Leis de de Morgan para quantificadores
  - Leis de quantificação nula

Conversão para a Forma Prenex

A conversão para a forma Prenex pode seguir os seguintes passos

1. Eliminar os símbolos de implicação e equivalência

$$\varphi \rightarrow \psi \quad \Leftrightarrow_{TT} \quad \neg \varphi \vee \psi$$

$$\varphi \leftrightarrow \psi \quad \Leftrightarrow_{TT} \quad (\neg \varphi \vee \psi) \wedge (\neg \psi \vee \varphi)$$

2. Aplicar as leis de de Morgan até não existirem símbolos de negação a anteceder quantificadores

$$\neg\forall \mathbf{x}\ \varphi(\mathbf{x}) \quad \Leftrightarrow_{FO} \quad \exists \mathbf{x}\ \neg\varphi(\mathbf{x})$$

$$\neg\exists \mathbf{x}\ \varphi(\mathbf{x}) \quad \Leftrightarrow_{FO} \quad \forall \mathbf{x}\ \neg\varphi(\mathbf{x})$$

3. Passar os quantificadores para o início, usando as regras de quantificação nula.

$$\forall \mathbf{x}\ (\varphi \wedge \psi(\mathbf{x})) \quad \Leftrightarrow_{FO} \quad \varphi \wedge \forall \mathbf{x}\ \psi(\mathbf{x})$$

$$\exists \mathbf{x}\ (\varphi \vee \psi(\mathbf{x})) \quad \Leftrightarrow_{FO} \quad \varphi \vee \exists \mathbf{x}\ \psi(\mathbf{x})$$

$$\forall \mathbf{x}\ (\varphi \vee \psi(\mathbf{x})) \quad \Leftrightarrow_{FO} \quad \varphi \wedge \forall \mathbf{x}\ \psi(\mathbf{x})$$

$$\exists \mathbf{x}\ (\varphi \wedge \psi(\mathbf{x})) \quad \Leftrightarrow_{FO} \quad \varphi \wedge \exists \mathbf{x}\ \psi(\mathbf{x})$$

   Neste último caso, ter o cuidado de renomear variáveis com o mesmo símbolo mas ligadas a diferentes quantificadores de forma a garantir que todos os quantificadores utilizem variáveis com nomes diferentes.

Conversão para a Forma Prenex

Exemplo 1: $\exists x\ (Cube(x) \land \exists y\ (Tet(y) \land Larger(x,y)))$

1. Eliminar os símbolos de implicação e equivalência
2. Aplicar as leis de de Morgan ...
3. Usar as regras de quantificação para alargar o escopo de $\exists y$

- Como em $Cube(x)$ não ocorre a variável **y** livre o quantificador $\exists y$ pode quantificá-la.

$$\exists x\ (\exists y\ (Cube(x) \land (Tet(y) \land Larger(x,y))))$$

que está na forma Prenex após a eliminação dos parênteses.

$$\exists x\ \exists y\ (Cube(x) \land Tet(y) \land Larger(x,y))$$

Conversão para a Forma Prenex

Exemplo 2: $\forall x\ (Cube(x) \rightarrow \exists y\ (Tet(y) \land Larger(x,y)))$

1. Eliminar os símbolos de implicação e equivalência

$$\forall x\ (\neg\ Cube(x) \lor \exists y\ (Tet(y) \land Larger(x,y)))$$

2. Aplicar as leis de de Morgan ...

3. Usar as regras de quantificação nula para alargar o escopo de $\exists y$

$$\forall x\ \exists y\ (\neg\ Cube(x) \lor (Tet(y) \land Larger(x,y)))$$

- podendo-se recuperar o símbolo de implicação se se quiser.

$$\forall x\ \exists y\ (Cube(x) \rightarrow (Tet(y) \land Larger(x,y)))$$

Conversão para a Forma Prenex

- O próximo exemplo permite verificar que duas fórmulas bastante diferentes são de facto equivalentes, originando a mesma forma Prenex.

Exemplo 3:

3.a Quaisquer que sejam as três pessoas, se a primeira é progenitora da segunda e a segunda da terceira então a primeira é avó da terceira.

$$\forall x \forall y \forall z\ ((\mathrm{Parent}(x,y) \land \mathrm{Parent}(y,z)) \rightarrow \mathrm{GrandParent}(x,z))$$

3.b Quaisquer que sejam duas pessoas, a primeira é avó da segunda se existir uma terceira pessoa de que a primeira seja progenitora e que por sua vez seja progenitora da segunda.

$$\forall x \forall y\ (\ \exists z (\mathrm{Parent}(x,z) \land \mathrm{Parent}(z,y)) \rightarrow \mathrm{GrandParent}(x,y))$$

- Esta última formulação não está na forma Prenex, mas vamos convertê-la para essa e compará-la com a primeira que já está na forma Prenex.

Conversão para a Forma Prenex

3 a: $\forall x \forall y \forall z\ ((Parent(x,y) \wedge Parent(y,z)) \rightarrow GrandParent(x,z))$

3 b: $\forall x \forall y\ (\ \exists z (Parent(x,z) \wedge Parent(z,y)) \rightarrow GrandParent(x,y))$

1. Eliminar os símbolos de implicação e equivalência

$$\forall x \forall y\ (\neg\ \exists z (Parent(x,z) \wedge Parent(z,y)) \vee GrandParent(x,y))$$

2. Aplicar as leis de de Morgan

$$\forall x \forall y\ (\forall z\ \neg (Parent(x,z) \wedge Parent(z,y)) \vee GrandParent(x,y))$$

3. Usar as regras de quantificação nula para alargar o escopo de $\forall z$

$$\forall x \forall y\ (\forall z\ (\ \neg (Parent(x,z) \wedge Parent(z,y)) \vee GrandParent(x,y)))$$

- recuperando-se o símbolo de implicação para obter uma FBF em Forma Prenex ue apóa a eliminação de um parêntesis é idêntica à fórmula 3a, a menos da renomeação das variáveis y e z.

$$\forall x \forall y \forall z\ ((Parent(x,z) \wedge Parent(z,y)) \rightarrow GrandParent(x,y))$$

Conversão para a Forma Prenex

- O próximo exemplo ilustra a importância de se renomearem variáveis
- **Exemplo 4**:

Existem objetos que são cubos e objetos que são pequenos.

$$\exists x\ Cube(x) \land \exists x\ Small(x)$$

1. Eliminar os símbolos de implicação e equivalência
2. Aplicar as leis de de Morgan
3. Usar as regras de quantificação nula para alargar o escopo do segundo quantificador

Erro: Sem renomear a 2ª variável, o primeiro quantificador fica redundante, pois na fórmula que quantifica $\exists x\ (Cube(x) \land Small(x))$ a variável x não ocorre livre.

$$\exists x\ \exists x\ (Cube(x) \land Small(x))$$

Correcto: Renomeando-se a 2ª variável, a primeira variável mantem-se livre

$$\exists x\ Cube(x) \land \exists y\ Small(y)$$

$$\exists x\ \exists y\ (Cube(x) \land Small(y))$$

Ordem dos Quantificadores

- Em geral, há que ter em atenção a ordem dos quantificadores consecutivos em FBFs (tal como ocorrem na forma Prenex mas que também podem ocorrer em FBFs que não estejam nessa forma).

- Se os quantificadores são do mesmo tipo essa ordem é irrelevante. Essa situação é manifesta em algumas das frases anteriores como "Quaisquer que sejam duas pessoas ... " ou para frases existenciais do tipo "Existem duas pessoas que ..." correspondendo a fórmulas equivalentes

$$\forall x \ \forall y \ \varphi(x,y) \Leftrightarrow \forall y \ \forall x \ \varphi(x,y)$$

$$\exists x \ \exists y \ \psi(x,y) \Leftrightarrow \exists y \ \exists x \ \psi(x,y)$$

- Já fórmulas com os dois tipos de quantificadores consecutivos não são equivalentes. Por exemplo não são equivalentes as especificações (no mundo dos blocos)

    - "Para qualquer objeto existe outro da mesma forma".
    - "Existe um objeto que é da mesma forma de qualquer outro"

Ordem dos Quantificadores

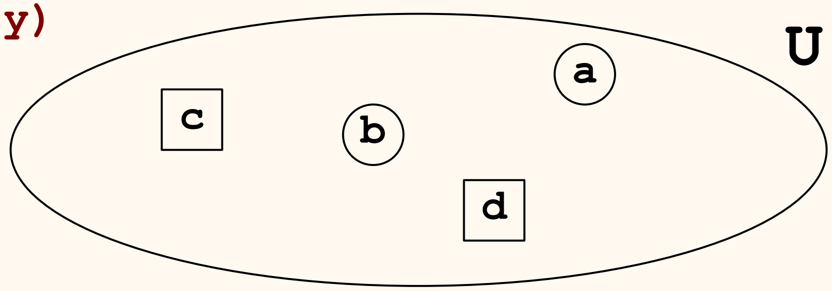
- Com efeito as traduções destas frases conduzem às FBFs (já na forma Prenex)
  - "Para qualquer objeto existe um da mesma forma".

    ∀x ∃y SameShape(x,y)

  - "Existe um objeto que é da mesma forma de qualquer objeto"

    ∃y ∀x SameShape(x,y)

- Com efeito no domínio ao lado:



∀x ∃y SameShape(x,y): qualquer que seja o objeto **x** que se escolha existe um objeto **y** que satisfaz a fórmula **SameShape(x,y) !!!**

```
a -> b
b -> a
c -> d
d -> c
```

∃y ∀x SameShape(x,y): existe um objeto y para o qual é verdade que todos os objetos x satisfaçam a fórmula **SameShape(x,y) ???**

```
a -> c (?)
b -> c (?)
c -> a (?)
d -> a (?)
```

Ordem dos Quantificadores

- Assim sendo alterações na ordem dos quantificadores consecutivos, provoca alterações no significado das fórmulas que deixam de ser equivalentes. De facto pode generalizar-se a situação ilustrada no exemplo para

$$\exists y\ \forall x\ \varphi(x,y) \Rightarrow_{FO} \forall x\ \exists y\ \varphi(x,y)$$

- **Se** a fórmula $\exists y\ \forall x\ \varphi(x,y)$ é verdadeira **então** $\forall x\ \exists y\ \varphi(x,y)$ também é;
- A fórmula $\forall x\ \exists y\ \varphi(x,y)$ pode ser verdadeira **e** $\exists y\ \forall x\ \varphi(x,y)$ não ser !

A título de curiosidade se interpretássemos as frases anteriores da forma habitual, obteríamos fórmulas com a forma Aristotélica, e com a mesma “força de verdade” relativa

$$\exists y\ \forall x\ \varphi(x,y) \Rightarrow_{FO} \forall x\ \exists y\ \psi(x,y)$$

- “Para qualquer objeto existe **outro** da mesma forma”.

  $\forall x\ \exists y\ (x \neq y \land \mathrm{SameShape}(x,y))$

- “Existe um objeto que é da mesma forma de qualquer **outro** objeto”

  $\exists y\ \forall x\ (x \neq y \to \mathrm{SameShape}(x,y))$